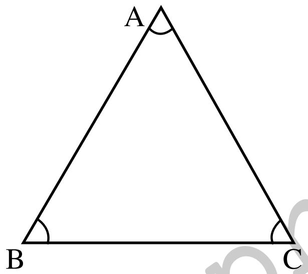
టెట్

గణితం (కంటెంట్)

త్రిభుజాలు

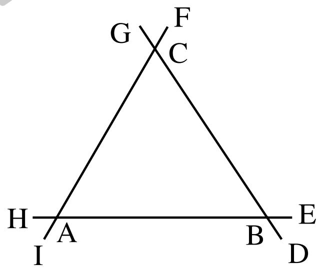
త్రిభుజం: మూడు రేఖా ఖండాలతో ఏర్పడిన సరళ సంవృత పటాన్ని త్రిభుజం అంటారు. దీన్ని Δ తో సూచిస్తారు.



పై ΔABC లో A,B,C లు మూడు శీర్షాలు

AB, BC, AC లు మూడు భుజాలు

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ లు మూడు అంతర కోణాలు



పై ΔABC లో $\angle FCB$, $\angle CBE$, $\angle ABD$, $\angle IAB$, $\angle HAC$, $\angle GCA$ లు బాహ్య కోణాలు.

★ ఒక త్రిభుజంలోని మూడు అంతర కోణాల మొత్తం ఎల్లప్పుడూ 180°కి సమానం

★ బాహ్యకోణం విలువ = ఆ బాహ్యకోణం రెండు అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తం $\angle CBE = \angle CAB + \angle BCA$

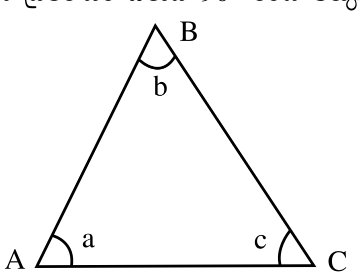
★ ఒక త్రిభుజం భుజాలు a, b, c లు అయితే ఆ త్రిభుజ చుట్టుకొలత = $a + b + c$ అవుతుంది.

ఆ త్రిభుజ అర్ధ చుట్టుకొలత = $\frac{a + b + c}{2}$ అవుతుంది.

త్రిభుజంలోని రకాలు:

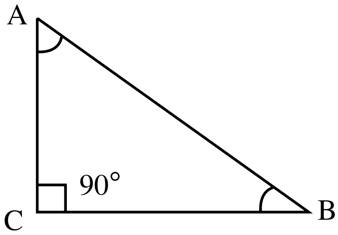
A (అంతరకోణాల ఆధారంగా)

1. అల్పకోణ త్రిభుజం: త్రిభుజంలోని ప్రతికోణం విలువ 90° కంటే తక్కువగా ఉంటే ఆ త్రిభుజాన్ని అల్పకోణ త్రిభుజం అంటారు.

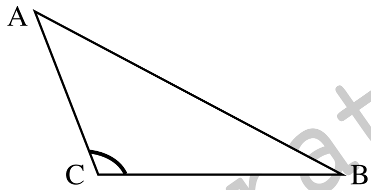


$\{\angle a, \angle b, \angle c\} < 90^\circ$

2. **లంబకోణ త్రిభుజం:** త్రిభుజంలో ఒక కోణం విలువ 90° అయితే ఆ త్రిభుజాన్ని లంబకోణ త్రిభుజం అంటారు.

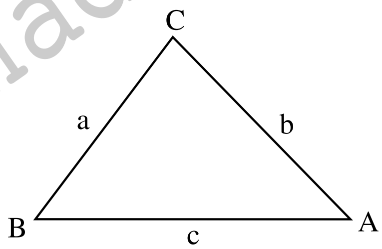


3. **అధికకోణ త్రిభుజం:** త్రిభుజంలో ఒక కోణం విలువ 90° కంటే ఎక్కువ ఉంటే ఆ త్రిభుజాన్ని అధికకోణ త్రిభుజం అంటారు.



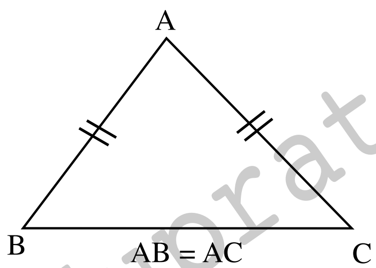
B. **త్రిభుజ భుజాల పొడవుల ఆధారంగా:**

1. **విషమబాహు త్రిభుజం:** ఒక త్రిభుజం లోని మూడు భుజాల పొడవులు అసమానంగా ఉంటే ఆ త్రిభుజాన్ని 'విషమబాహు త్రిభుజం' అంటారు.



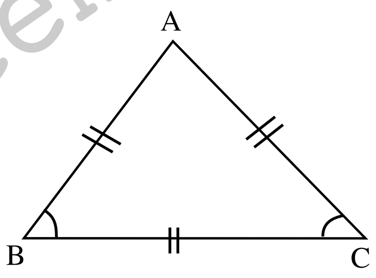
$a \neq b \neq c$

2. **సమద్విబాహు త్రిభుజం:** ఒక త్రిభుజంలోని ఏవైనా రెండు భుజాలు సమానంగా ఉంటే అలాంటి త్రిభుజాన్ని 'సమద్విబాహు త్రిభుజం' అంటారు.



ΔABCలో $AB = AC$ అయితే $B = C$ అవుతుంది.

3. **సమబాహు త్రిభుజం:** ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలు సమానంగా ఉంటే ఆ త్రిభుజాన్ని 'సమబాహు త్రిభుజం' అంటారు.



$AB = BC = AC$

ΔABC లో $AB = BC = AC$

అయితే $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

1. **sine** నియమం: ΔABC లో a,b,c లు మూడు భుజాల పొడవులు, ఆ భుజాలకు ఎదురుగా ఉన్న కోణాలు A,B,C లు అయితే

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

2. **cosine** నియమం: ΔABC లో a,b,c లు మూడు భుజాల పొడవులు, ఆ భుజాలకు ఎదురుగా ఉన్న కోణాలు A,B,C లు అయితే

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

ముఖ్యమైన సమస్యలు

ప్ర: **ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలు వరుసగా 12 సెం.మీ., 8 సెం.మీ., 6 సెం.మీ. అయితే అది ఏ రకమైన త్రిభుజం?**

సాధన: $12^2 > 8^2 + 6^2$ కాబట్టి అధికకోణ త్రిభుజం

గమనిక: ΔABC భుజాలు a, b, c అయితే $[c > a \;\&\; c > b]$

i) $c^2 < a^2 + b^2$ అయితే అల్పకోణ త్రిభుజం

ii) $c^2 = a^2 + b^2$ అయితే లంబకోణ త్రిభుజం

iii) $c^2 > a^2 + b^2$ అయితే అధిక కోణ త్రిభుజం అవుతుంది.

పై సమస్యలో అధిక పొడవు ఉన్న భుజం 12 సెం.మీ.లను 'c' గా తీసుకోవాలి.

ప్ర: AB, BC, AC లు ΔABC మూడు భుజాలు అయితే కిందివాటిలో ఏది సత్యం?

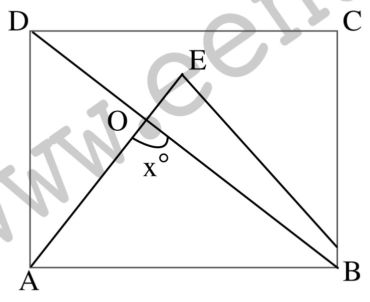
1) $AB - BC = AC$ 2) $(AB - BC) > AC$

3) $(AB - BA) < AC$ 4) $AB^2 - BC^2 = AC^2$

సాధన: సమస్యలో AB పొడవు = BA పొడవు కాబట్టి $AB - BA = 0$ అవుతుంది.

$(AB - BA) < AC$ అనేది సత్యం అవుతుంది.

ప్ర: కింది పటం ABCD ఒక చతురస్రం, ΔABC సమబాహు త్రిభుజం అయితే x విలువ – (డిగ్రీల్లో)?



సాధన: $\angle EAB = \angle OAB = 60^\circ$

($\because$ABC సమభాహు త్రిభుజం)

$\angle ABD = 45^\circ$ ($\because$ BD కర్ణం కాబట్టి $\angle ABD = 45^\circ$ అవుతుంది.)

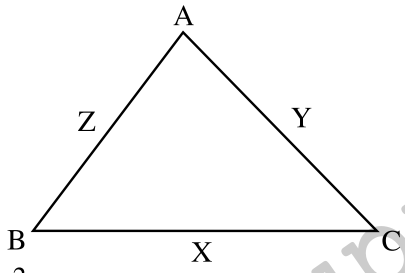
$\angle AOB = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ)$

$= 180^\circ - 105^\circ$

$= 75^\circ$

ప్ర: ΔABCలో $BC = x, AC = y, AB = z,$

$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ అయితే ఆ త్రిభుజం ఏరకమైంది?



సాధన: $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$

$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$

$\Rightarrow (x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (z^2 + x^2) - 2xy - 2yz - 2zx = 0$

$\Rightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + z^2 - 2\,yz) + (z^2 + x^2 - 2\,zx) = 0$

$\Rightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$

$x - y = 0 \Rightarrow x = y$

$y - z = 0 \Rightarrow y = z$

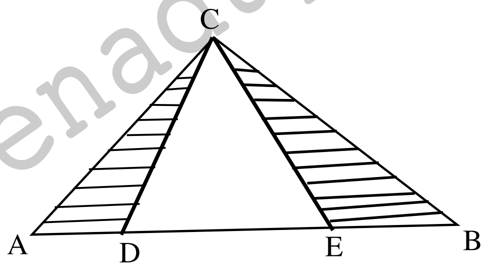
$z - x = 0 \Rightarrow z = x$

[$a^2 + b^2 + c^2 = 0$ అయితే $a = 0, b = 0, c = 0$ అవుతుంది]

$\therefore x = y = z$

ΔABC సమబాహు త్రిభుజం అవుతుంది.

ప్ర: కింది పటం ΔABC ఒక సమబాహు త్రిభుజం AB పై D, E లు $AD = DE = EB$ అయ్యేవిధంగా ఉన్నాయి. $AB = BC = CA = 6$ సెం.మీ. అయితే పటంలో షేడ్ చేసిన ప్రాంత వైశాల్యమెంత?



సాధన: $\Delta\ ABC$ సమబాహు త్రిభుజం, $AB = BC = CA = 6$ సెం.మీ.

$\Delta\ ABC$ త్రిభుజవైశాల్యం $= \dfrac{\sqrt{3}}{4}\ a^2$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}\ (6)^2 = 9\sqrt{3}$ సెం.మీ.^{2}

Δ CDE వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు

$= \frac{1}{2} \times DE \times \Delta ABC$ ఎత్తు

$= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6$

$\left(\because DE = \frac{AB}{3} = \frac{6}{3} = 2 \right)$

$\left(\Delta ABC \text{ ఎత్తు } (h) = \frac{\sqrt{3}}{2} a \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6$

$= 3\sqrt{3}$ సెం.మీ.^{2}

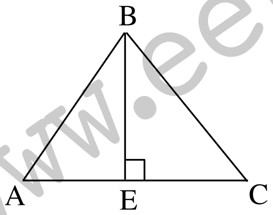
షేడ్ చేసిన ప్రాంత వైశాల్యం $= \Delta ABC$ వైశాల్యం $- \Delta CDE$ వైశాల్యం

$= 9\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

$= 6\sqrt{3}$ సెం.మీ.^{2}

ప్ర: : ΔABC ఒక సమబాహు త్రిభుజం, $BE \perp CA$ అయితే $AB^2 + BC^2 + CA^2 = ...$

సాధన: ΔABC లో BE అనేది ఆ త్రిభుజం ఎత్తు అవుతుంది.



$BE = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AB$

$BE^2 = \frac{3}{4} \times AB^2 \Rightarrow AB^2 = \frac{4}{3} BE^2$

ఇప్పుడు,

$AB^2 + BC^2 + CA^2 = AB^2 + AB^2 + AB^2$

$= 3AB^2$

$= 3\left(\frac{4}{3} BE^2\right) = 4BE^2$

ప్ర: ఒక సమబాహు త్రిభుజం భుజం, ఎత్తుల నిష్పత్తి ..

1) 2 : 1 2) 1 : 1 3) $2 : \sqrt{3}$ 4) $\sqrt{3} : 2$

సాధన: ఒక సమబాహు త్రిభుజం భుజం $= a$ అనుకుంటే

ఎత్తు $= \frac{\sqrt{3}}{2} a$

భుజం : ఎత్తు $= a : \frac{\sqrt{3}}{2} a$

$= 1 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 : \sqrt{3}$

రచయిత: సీహెచ్. రాధాకృష్ణ