

ఎపీ టెట్

గణితం

నిష్పత్తి - అనుపాతం

నిష్పత్తి: ఒకే ప్రమాణం ఉన్న రెండు రాశులను భాగహారం ద్వారా పోల్చడాన్ని 'నిష్పత్తి' అంటారు. దీన్ని ":" గుర్తుతో సూచిస్తారు.

- ★ a, b అనే రాశుల నిష్పత్తిని a : b తో సూచిస్తారు. దీన్ని $\frac{a}{b}$ గా కూడా రాయవచ్చు.
- ★ a : b లో 'a' ను పూర్వ పదమని 'b' ను పర పదమని అంటారు.
- ★ నిష్పత్తిలో ప్రతి పదాన్నీ ఒకే సంఖ్యతో గుణించినా లేదా భాగించినా నిష్పత్తిలో మార్పు రాదు. కలిపినా, తీసివేసినా మార్పు వస్తుంది.

ఉదా: (i) a : b = ac : bc

$$(ii) a : b = \frac{a}{c} : \frac{b}{c}$$

$$(iii) a : b \neq (a \pm c) : (b \pm c)$$

విలోమ నిష్పత్తి: నిష్పత్తిలో ప్రతి పదం గుణన విలోమాల నిష్పత్తిని 'విలోమ నిష్పత్తి' అంటారు.

$$\star a : b \text{ విలోమ నిష్పత్తి} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$$

$$\star a : b : c \text{ విలోమ నిష్పత్తి} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$
$$= bc : ac : ab$$

$$\text{ఉదా: } \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = 1 : 2 : 3 \text{ అయితే } x : y : z$$

$$= (2 \times 3) : (1 \times 3) : (1 \times 2)$$

$$= 6 : 3 : 2$$

బహుళ నిష్పత్తి: రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ నిష్పత్తుల పూర్వ పదాల లబ్ధానికి, పర పదాల లబ్ధానికి ఉన్న నిష్పత్తిని 'బహుళ నిష్పత్తి' అంటారు.

$$\star a : b ; c : d \text{ బహుళ నిష్పత్తి} = ac : bd$$

$$\star a : b ; c : d ; e : f \text{ బహుళ నిష్పత్తి} = ace : bdf$$

$$\star a : b \text{ వర్గ నిష్పత్తి} = a^2 : b^2$$

$$\star a : b \text{ ఘన నిష్పత్తి} = a^3 : b^3$$

ఉదా: 5 : 8, 3 : 7ల బహుళ నిష్పత్తి 45 : x అయితే x ఎంత?

$$\text{సాధన: } 15 : 56 = 45 : x$$

$$15x = 56 \times 45$$

$$\therefore x = 168$$

అనుపాతం: రెండు నిష్పత్తుల సమానత్వాన్ని అనుపాతం అంటారు.

★ $a : b = c : d$ అయితే a, b, c, d లు అనుపాతంలో ఉన్నాయి అంటారు. దీన్ని $a : b :: c : d$ తో సూచిస్తారు.

★ $a : b = c : d$ అయితే అంత్య పదాల లబ్ధం = మధ్య పదాల లబ్ధం

$$\Leftrightarrow ad = bc$$

ఉదా: $2 : 5 = 6 : x$ అయితే x ఎంత?

$$\text{సాధన: } 2x = 5 \times 6$$

$$\therefore x = 15$$

మధ్యమ అనుపాతం: $a : b = b : c$ అయితే a, b, c లు అనుపాతంలో ఉన్నాయి అంటారు.

★ a, b, c ల అనుపాతంలో 'b' ను మధ్యమ అనుపాతం అంటారు.

★ a, b, c ల మధ్యమ అనుపాతం $(b) = \sqrt{ac}$

తృతీయ అనుపాతం: $a : b = b : c$ అయితే అనుపాతంలో 'c' ను తృతీయ అనుపాతం అంటారు.

★ a, b, c తృతీయ అనుపాతం $(c) = \frac{b^2}{a}$

చతుర్థ అనుపాతం: $a : b = c : d$ అయితే a, b, c, d లు అనుపాతంలో ఉంటాయి. అందులో 'd' ను చతుర్థ అనుపాతం అంటారు.

★ చతుర్థ అనుపాతం $(d) = \frac{bc}{a}$

అనులోమానుపాతం: ఏవైనా రెండు రాశుల్లో ఒక రాశిలో పెరుగుదల ఏర్పడినప్పుడు, రెండో రాశిలో పెరుగుదల స్థిర నిష్పత్తిలో ఉంటే ఆ రాశులు అనులోమానుపాతంలో ఉన్నాయి అంటారు.

ఉదా: వస్తువుల సంఖ్య, ఖరీదుకు అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

★ x, y కి అనులోమానుపాతంలో ఉండటాన్ని $x \propto y$ తో సూచిస్తారు. $x \propto y \Rightarrow x = ky$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = k$$

★ x రాశికి అనుగుణమైన విలువలు x_1, x_2 , y రాశికి అనుగుణమైన విలువలు y_1, y_2 అయితే $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$

విలోమానుపాతం: ఏవైనా రెండు రాశుల్లో ఒక రాశిలో పెరుగుదల ఏర్పడినప్పుడు, రెండో రాశిలో తరుగుదల స్థిర నిష్పత్తిలో ఉంటే, ఆ రాశులు విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయి అంటారు.

ఉదా: మనుష్యుల సంఖ్య, రోజులకు విలోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

★ x, y కి అనుగుణమైన విలువ x_1, x_2, y_1, y_2 అయితే $x_1 y_1 = x_2 y_2$

మిశ్రమానుపాతం: కొన్ని సందర్భాల్లో ఒక రాశిలో మార్పు, ఒకటి కంటే ఎక్కువ రాశులతో అనుపాతంలో ఉండవచ్చు. దీన్ని మిశ్రమానుపాతం అంటారు.

మిశ్రమానుపాతంలో రాశుల మధ్య సంబంధం:

M_1 మంది D_1 రోజుల్లో రోజుకు T_1 గంటలపాటు చేసే పని W_1 . మరో గ్రూపులో M_2 మంది D_2 రోజుల్లో T_2 గంటల పాటు చేసే పని W_2 అప్పుడు

$$\frac{M_1 D_1 T_1}{W_1} = \frac{M_2 D_2 T_2}{W_2}$$

ఉదా: 8 మందికి 20 రోజులకు కావాల్సిన బియ్యం వెల రూ.480 అయితే 12 మందికి 15 రోజులకు కావాల్సిన బియ్యం వెల ఎంత?

సాధన:
$$\frac{M_1 D_1}{W_1} = \frac{M_2 D_2}{W_2}$$

$$\Rightarrow \frac{8 \times 20}{480} = \frac{12 \times 15}{x}$$

$$\Rightarrow x = 12 \times 15 \times 3$$

$$\Rightarrow x = \text{రూ.} 540.$$

శాతాలు

శాతం: శాతం అంటే 'ప్రతి వందలో' లేదా ప్రతి 'వందకు' అని అర్థం.

- ★ శాతం అంటే ఒక రాశిని 100తో పోల్చడం. దీన్ని '%' గుర్తుతో సూచిస్తారు.
- ★ $x\% = x \times 100\%$ అంటే ప్రతి సంఖ్య, దానిలో అదే 100%
- ★ శాతాన్ని భిన్నంగా మార్చడానికి ఆ రాశిని '100'తో భాగించాలి.

ఉదా: $4\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

- ★ బిన్నాన్ని శాతంగా మార్చడానికి ఆ బిన్నాన్ని 100తో గుణించి, '%' గుర్తు ఉంచాలి.

ఉదా: $(1) \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times 100 = 40\%$

ఒక రాశిలో పెరుగుదల లేదా తరుగుదల:

- ★ ఒక రాశిలో $x\%$ పెరుగుదల ఏర్పడితే ఆ రాశి విలువ = మొదటి రాశి $\left(\frac{100 + x}{100}\right)$
- ★ ఒక రాశిలో $x\%$ తరుగుదల ఏర్పడితే ఆ రాశి విలువ = మొదటి రాశి $\left(\frac{100 - x}{100}\right)$

ఉదా: ఒక పుస్తకం ధర రూ.400 దానిలో 10% పెరుగుదల ఏర్పడితే విలువ ఎంత?

సాధన: $400 \left(\frac{100 + 10}{100}\right) = 400 \times \frac{110}{100} = 440$

2) ఒక జత బూట్ల ధర రూ.550. వాటి అమ్మకంపై 10% తగ్గింపు ఉంటే ఆ బూట్ల అమ్మకం ధర ఎంత?

సాధన: $550 \left(\frac{100 - 10}{100}\right) = 550 \times \frac{90}{100}$
 $= \text{రూ.} 495$

ఒక రాశిలో వివిధ సందర్భాల్లో మార్పు

- ★ ఒక రాశి విలువ మొదట $x\%$ పెరిగి, తర్వాత $x\%$ తగ్గితే ఆ రాశిలో మార్పు ఎల్లప్పుడూ తరుగుదలే.

\therefore తరుగుదల శాతం = $\frac{x^2}{100} \%$

ఉదా: విజయ్ జీతం మొదట 20% పెరిగిన తర్వాత 20% తగ్గితే జీతంలో మార్పు = $\frac{20 \times 20}{100} = 4\%$ తరుగుదల.

- ★ ఒక రాశి విలువ మొదట $x\%$ పెరుగుదల లేదా (తరుగుదల), తర్వాత $y\%$ పెరుగుదల లేదా (తరుగుదల) ఉంటే రాశిలో మార్పు

$$= \left(x + y + \frac{xy}{100} \right) \%$$

నోట్: పెరిగిన '+', తరిగిన '-'

ఉదా: TV ధర 20% పెరిగి, అమ్మకాలు 10% తగ్గితే

అమ్మకాల్లో మార్పు శాతం

$$= 20 - 10 + \frac{20 \times (-10)}{100}$$

$$= 10 - 2$$

$$= 8\% \text{ పెరుగుదల.}$$

లాభనష్టాలు - రుసుం

లాభం

- ★ అమ్మిన వెల > కొన్న వెల అయితే లాభం వస్తుంది.

- ★ లాభం = అమ్మిన వెల - కొన్న వెల

- ★ లాభ శాతం = $\frac{\text{లాభం}}{\text{కొన్న వెల}} \times 100$

కొన్న వెల	లాభ శాతం	అమ్మిన వెల
100% →	10% →	110%
	20% →	120%
	25% →	125%

నష్టం

- ★ కొన్న వెల > అమ్మిన వెల అయితే నష్టం వస్తుంది.

- ★ నష్టం = కొన్న వెల - అమ్మిన వెల

- ★ నష్ట శాతం = $\frac{\text{నష్టం}}{\text{కొన్న వెల}} \times 100$

కొన్న వెల	నష్ట శాతం	అమ్మిన వెల
100% →	10% →	90%
	20% →	80%

సూత్రాలు

- ★ రెండు వస్తువులను ఒకే ధరకు కొని, వాటిని అమ్మినప్పుడు మొదటి దానిపై $x\%$ లాభం, రెండో దానిపై $x\%$ నష్టం వస్తే మొత్తం మీద 'లాభం గానీ నష్టంగానీ ఉండదు'.

- ★ రెండు వస్తువులను ఒకే ధరకు అమ్ముతుండగా మొదటి దానిపై $x\%$ లాభం, రెండో దానిపై $x\%$ నష్టం వస్తే మొత్తం మీద ఎల్లప్పుడూ నష్టమే వస్తుంది.

$$\therefore \text{నష్ట శాతం} = \frac{x^2}{100} \%$$

- ★ రెండు వస్తువులను ఒకే ధరకు అమ్ముతుండగా మొదటి దానిపై $x\%$ లాభం లేదా నష్టం, రెండో దానిపై $y\%$ లాభం లేదా నష్టం వస్తే మొత్తం మీద లాభశాతంగానీ, నష్టశాతంగానీ $\left(\frac{100(x+y)+2xy}{200+x+y}\right) \%$ అవుతుంది.

నోట్: లాభం అయితే "+", నష్టం అయితే "-", గుర్తు వాడాలి.

రుసుం లేదా ముదరా

- ★ ఫ్యాక్టరీలో వస్తువు ఉత్పత్తిదారులు నిర్ణయించే ధరను జాబితా ధర, క్యాటలాగ్ ధర లేదా ప్రకటన వెల అంటారు.
- ★ కొన్ని సందర్భాల్లో ప్రకటన ధరను తగ్గించి అమ్ముతూ ఉంటారు. ఈ తగ్గింపునే రుసుం లేదా ముదరా అంటారు.
- ★ రుసుం = ప్రకటన వెల - అమ్మిన వెల

$$\text{రుసుం శాతం} = \frac{\text{రుసుం}}{\text{ప్రకటన వెల}} \times 100$$

ప్రకటన వెల	రుసుం	అమ్మిన వెల
100% →	10% →	90%
	20% →	80%

- ★ ఒక వస్తువుపై $x\%$, $y\%$ చొప్పున రెండు వరస రుసుములు పొందితే ఇచ్చిన మొత్తం రుసుం = $\left(x + y - \frac{xy}{100}\right) \%$

ఉదా: ఒక వ్యక్తి 10%, 20% చొప్పున రెండు వరస రుసుములు పొందితే మొత్తం రుసుం ఎంత?

$$\begin{aligned} \text{సాధన: } x + y - \frac{xy}{100} &= 10 + 20 - \frac{10 \times 20}{100} \\ &= 30 - 2 \\ &= 28\% \end{aligned}$$

విలువ ఆధారిత పన్ను (VAT):

- ★ ప్రభుత్వం వస్తువుల అమ్మకంపై పన్ను వసూలు చేస్తుంది. దీన్నే 'విలువ ఆధారిత పన్ను' అంటారు.
- ★ 'VAT' కేవలం సరకులపై వేసే పన్ను. సేవలపై ఈ పన్ను వేయరు.
- ★ 'VAT'ని ఎప్పుడూ వస్తువు 'ప్రకటన వెల'పై లెక్కిస్తారు.
- ★ 'VAT' అనేది అమ్మకం వెలపై పెరుగుదల.

ప్రకటన వెల	VAT	అమ్మినవెల
100% →	10% →	110%
	20% →	120%

మాదిరి ప్రశ్నలు

1. ఒక కుండలో 8 లీటర్ల పాలు, మరో కుండలో 750 మిల్లీ లీటర్ల పాలు ఉన్నాయి. అయితే రెండు పాత్రల్లో ఉన్న పాల నిష్పత్తి ఎంత?
A) 16 : 5 B) 3 : 32 C) 32 : 3 D) 5 : 16
2. రాము తన వద్ద ఉన్న సొమ్ములో $\frac{2}{5}$ వ వంతు ఒక కథల పుస్తకంపై ఖర్చు పెట్టాడు. అయితే రాము ఖర్చు పెట్టిన సొమ్ముకు, మొదట అతడి వద్ద ఉన్న సొమ్ముకు ఉన్న నిష్పత్తి ఎంత?
A) 2 : 5 B) 5 : 2 C) 3 : 4 D) 4 : 3
3. $A : B = 5 : 9$, $B : C = 4 : 7$ అయితే $A : B : C$ ఎంత?
A) 15 : 18 : 20 B) 20 : 36 : 63 C) 36 : 63 : 20 D) ఏదీకాదు
4. $A : B = 5 : 6$, $B : C = 2 : 5$ అయితే $A : C$ ఎంత?
A) 1 : 3 B) 3 : 1 C) 5 : 7 D) 6 : 11
5. ఒక స్వర్ణకారుడు బంగారం తయారీలో బంగారం, రాగిని 7 : 2 నిష్పత్తిలో కలిపాడు. ఆభరణం బరువు 45 గ్రా. అయితే దానిలోని బంగారం బరువు ఎంత?
A) 10 గ్రా. B) 35 గ్రా. C) 25 గ్రా. D) 40 గ్రా.

జవాబులు

1-C; 2-A; 3-B; 4-A; 5-B.

రచయిత: ఉదయ్