అరిథ్‌మెటిక్

అనుపాతం

★ a : b = c : d అయితే a, b, c, d లు అనుపాతంలో ఉన్నాయని అంటారు.

★ a, b, c, d లు అనుపాతంలో ఉంటే a ని మొదటి పదమని, b ని ద్వితీయ పదమని, c ని తృతీయ పదమని, d ని చతుర్థ పదమని అంటారు.

★ a, b, c, d లు అనుపాతంలో ఉంటే ad = bc. అంత్యపదాల లబ్ధం = మధ్యపదాల లబ్ధం

★ a : b = b : c అయితే a, b, b, c లు అనుపాతంలో ఉంటాయి. అంటే a, b, c లు అనుపాతంలో ఉంటాయి.

★ a, b, c లు అనుపాతంలో ఉంటే $b^2 = ac$ అవుతుంది.

లేదా $b = \sqrt{ac}$ అవుతుంది.

b ని అనుపాత మధ్యమం అంటారు.

★ x, y ల అనుపాత మధ్యమం $= \sqrt{xy}$

గమనిక:

★ a, b, c, x లు అనుపాతంలో ఉంటే $x = \frac{bc}{a}$

★ a, x, b లు అనుపాతంలో ఉంటే $x = \sqrt{ab}$

★ a : b = c : d అయితే

i) b : a = d : c (Invertendo Rule)

i) a : c = b : d (Alternendo Rule)

iii) (a + b) : b = (c + d) : d (Rule of Componendo)

iv) (a – b) : b = (c – d) : d (Rule of Dividendo)

v) (a + b) : (a – b) = (c + d) : (c – d) (Rule of Componendo and Dividendo)

vi) a : b = c : d = (a + c) : (b + d) (Rule of Addendo)

vii) a : b = c : d = (a – c) : (b – d) (Rule of Substranendo)

నమూనా ప్రశ్నలు

1. $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = x$ అయితే x విలువ ఎంత?

1) 2 2) $\frac{3}{2}$ 3) 1 4) $\frac{1}{2}$

సాధన: $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = x$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{b+c+c+a+a+b} = x$$

(Rule of Addendo)

$$\Rightarrow \frac{a + b + c}{2(a + b + c)} = x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

సమాధానం: 4

2. 3, 6, 4.5 ల అనుపాత చతుర్థ పదం?

1) 8 2) 9 3) 12 4) 15

సాధన: 3, 6, 4.5 ల అనుపాత చతుర్థ పదం = x అనుకుంటే

3, 6, 4.5, x లు అనుపాతంలో ఉంటాయి.

$\Rightarrow 3 : 6 = 4.5 : x$

$\Rightarrow 3 \times x = 6 \times 4.5 \Rightarrow x = \frac{6 \times 4.5}{3}$

$\Rightarrow 2 \times 4.5 = 9$

సమాధానం: 2

3. 23, 30, 57, 78 ల నుంచి ఏ సంఖ్యను తీసేస్తే వచ్చే సంఖ్యలు అనుపాతంలో ఉంటాయి?

1) 4 2) 6 3) 7 4) 8

సాధన: తీసేయాల్సిన సంఖ్య = x అనుకుంటే

$(23 - x) : (30 - x) = (57 - x) : (78 - x)$

$\Rightarrow \frac{(23 - x)}{(30 - x)} = \frac{(57 - x)}{(78 - x)}$

$\Rightarrow (23 - x)(78 - x) = (30 - x)(57 - x)$

$\Rightarrow 1794 - 101x + x^2 = 1710 - 87x + x^2$

$\Rightarrow 1794 - 1710 = 101x - 87x \Rightarrow 14x = 84$

$\Rightarrow x = \frac{84}{14} = 6$

సమాధానం: 2

4. $p : q = q : r$ అయితే $p^2 : q^2 = ?$

1) p : r 2) p : q 3) r : q 4) q : r

సాధన: $p : q = q : r \Rightarrow q^2 = pr$

$p^2 : q^2 = \frac{p^2}{q^2} = \frac{p^2}{pr} = \frac{p}{r} = p : r$

సమాధానం: 1

5. p, r ల అనుపాత మధ్యమం q అయితే $q^4\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}\right) = ?$

1) $p^2 + q^2 + r^2$ 2) $p^2 + q^2 - r^2$

3) $p^2 - q^2 + r^2$ 4) $p^2 - q^2 - r^2$

సాధన: p, r ల అనుపాత మధ్యమం q అయితే

$q^2 = pr$

$$q^4\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}\right) = \frac{q4}{p^2} - \frac{q4}{q^2} + \frac{q4}{r^2}$$

$$= \frac{p^2r^2}{p^2} - q^2 + \frac{p^2r^2}{r^2}$$

$$= r^2 - q^2 + p^2 = p^2 - q^2 + r^2$$

సమాధానం: 3

6. (x + 2), (x + 9) ల అనుపాత మధ్యమం (x + 5) అయితే x విలువ?

1) 5 2) 6 3) 7 4) 8

సాధన:(x + 2), (x + 9) ల అనుపాత మధ్యమం (x + 5) అయితే $(x + 5)^2 = (x + 2)(x + 9)$

$\Rightarrow x^2 + 10x + 25 = x^2 + 9x + 2x + 18$

$\Rightarrow x^2 + 10x + 25 = x^2 + 11x + 18$

$\Rightarrow 25 - 18 = 11x - 10x \Rightarrow 7 = x$

$\therefore x = 7$

సమాధానం: 3

7. x, y, z లు అనుపాతంలో ఉంటే,

$x^2 - y^2 : x^2 + y^2 = ?$

1) (x − z) : (x + z) 2) (x + z) : (x − z)

3) (x + y) : (y + z) 4) (y + z) : (y − z)

సాధన: x, y, z లు అనుపాతంలో ఉంటే, $y^2 = xz$.

$$x^2 - y^2 : x^2 + y^2 = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - xz}{x^2 + xz} = \frac{x(x - z)}{x(x + z)}$$

$$\Rightarrow \frac{(x - z)}{(x + z)} = (x - z) : (x + z)$$

సమాధానం: 1

8. అనుపాత ధర్మాలను ఉపయోగించి $\frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1} = \frac{341}{91}$ ను సాధిస్తే, x విలువ?

1) 10 2) 11 3) 13 4) 15

సాధన: $\frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1} = \frac{341}{91}$

$$\Rightarrow \frac{(x^3 + 3x) + (3x^2 + 1)}{(x^3 + 3x) - (3x^2 + 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{341 + 91}{341 - 91}$$

(Componendo and Dividendo Rule)

$$\Rightarrow \frac{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)}{(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{432}{250} = \frac{216}{225}$$

$$\Rightarrow \frac{(x + 1)^3}{(x - 1)^3} = \frac{6^3}{5^3} = \left(\frac{6}{5}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{(x + 1) + (x - 1)}{(x + 1) - (x - 1)} = \frac{6 + 5}{6 - 5}$$

(Componendo and Dividendo Rule)

$$\Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{11}{1} \Rightarrow x = 11$$

సమాధానం: 2

9. ఒక ప్రాథమిక పాఠశాలలో 60 మంది విద్యార్థులకు ముగ్గురు ఉపాధ్యాయులు ఉండాలి. ఆ పాఠశాలలో 420 మంది విద్యార్థులు చేరితే అదే నిష్పత్తిలో ఎంతమంది ఉపాధ్యాయులు కావాలి?

1) 19 2) 21 3) 23 4) 24

సాధన: 60 మంది విద్యార్థులకు ఉండాల్సిన ఉపాధ్యాయులు = 3

విద్యార్థుల సంఖ్యకు, ఉపాధ్యాయుల సంఖ్యకు మధ్య నిష్పత్తి = 60 : 3

420 మంది విద్యార్థులకు ఉండాల్సిన ఉపాధ్యాయులు = x

విద్యార్థుల సంఖ్యకు, ఉపాధ్యాయుల సంఖ్యకు మధ్య నిష్పత్తి = 420 : x

60 : 3 = 420 : x

$60 \times x = 3 \times 420$

$$x = \frac{3 \times 420}{60} = 3 \times 7 = 21$$

$\therefore x = 21$

సమాధానం: 2

10. సౌమ్య, కళ్యాణిలు వ్యాపారంలో భాగస్వాములు. కళ్యాణి ప్రతినెల వచ్చిన లాభంలో 25% తీసుకుంటుంది. ఒక నెలలో కళ్యాణి తీసుకున్న మొత్తం ` 2,080 అయితే ఆ నెలలో వారికి వచ్చిన మొత్తం లాభం ఎంత? (రూపాయల్లో)

1) 5345 2) 9087 3) 8320 4) 6789

సాధన: మొత్తం లాభం = 100%, అయితే

కళ్యాణి తీసుకున్న లాభం = 25%

మొత్తం లాభం = x రూపాయలు అనుకుంటే

కళ్యాణి తీసుకున్న లాభం = ` 2080

100% : 25% = x : 2080

$100 \times 2080 = 25 \times x$

$\frac{100 \times 2080}{25} = x \Rightarrow x = 4 \times 2080 = 8320$

$\therefore$ x = ` 8320

సమాధానం: 3

11. ఒక రైతుకు గత ఏడాది పత్తి పంటలో 1720 బస్తాల దిగుబడి వచ్చింది. ఈ ఏడాది అతడు సరైన వ్యవసాయ పద్ధతులు పాటించడం వల్ల పంట 20% దిగుబడి ఎక్కువ వస్తుందని భావిస్తున్నాడు. అయితే ఈ ఏడాది అతడు ఎన్ని బస్తాల దిగుబడి ఆశిస్తున్నాడు?

1) 2084 2) 1984 3) 1964 4) 2064

సాధన: గత ఏడాది దిగుబడి = 100% అనుకుంటే

ఈ ఏడాది దిగుబడి = 100% + 20% = 120%

గత ఏడాది దిగుబడి = 1720 బస్తాలు

ఈ ఏడాది దిగుబడి = x బస్తాలు అనుకుంటే

ఇప్పుడు 100% : 120% = 1720 : x

$100 \times x = 120 \times 1720$

$x = \frac{120 \times 1720}{100} = \frac{12}{172} = 2064$ బస్తాలు

సమాధానం: 4

అభ్యాస ప్రశ్నలు

1. 1.5, 4.5, 3.5 ల అనుపాత చతుర్థ పదం ఏది?

1) 11.5 2) 9.5 3) 10.5 4) 12.5

2. 16, 7, 79, 43 లకు ఏ కనిష్ఠ సంఖ్య కూడితే వచ్చే సంఖ్యలు అనుపాతంలో ఉంటాయి?

1) 5 2) 6 3) 3 4) 2

3. $a - b, a^2 - b^2$, x లు అనుపాతంలో ఉంటే x విలువ?

1) $(a - b)(a^2 + b^2)$ 2) $(a + b)(a^2 - b^2)$

3) $(a + b)(a^2 + b^2)$ 4) $(a - b)(a^2 - b^2)$

4. x, y ల అనుపాత మధ్యమం 6; x, y ల అనుపాత తృతీయ పదం 48 అయితే x, y విలువలు వరుసగా?

1) 4, 24 2) 3, 16 3) 2, 14 4) 3, 12

జవాబులు: 1-3; 2-1; 3-2; 4-4.

రచయిత: సీహెచ్. రాధాకృష్ణ